

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	05.03.06 Экология и природопользование
3.	Направленность (профиль)	Природопользование и экологическая безопасность.
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.10 Математика
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2023

## **I. Методические рекомендации**

### **1.1 Методические рекомендации по организации работы студентов во время проведения лекционных занятий**

- В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации для практического занятия и указания для выполнения самостоятельной работы.
- В ходе лекционных занятий обучающемуся необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание изучаемой дисциплины, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве.
- Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Рекомендуется активно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

### **1.2 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

- На практическом занятии студенты решают задачи под руководством преподавателя. Семинар проводится по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы.
- Практические занятия посвящены изучению наиболее важных тем учебной дисциплины. Они служат для закрепления изученного материала, развития умений и навыков подготовки докладов, сообщений, приобретения опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, аргументации и защиты выдвигаемых положений, а также для контроля преподавателем степени подготовленности студентов по изучаемой дисциплине.
- В ходе подготовки к практическим занятиям следует изучить основную и дополнительную литературу, учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.
- Можно подготовить свой конспект ответов по рассматриваемой тематике, подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на занятие. Следует продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной практикой. Можно дополнить список рекомендованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

### **1.3 Методические рекомендации к самостоятельной работе**

- Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).
- Самостоятельная работа студентов (далее – СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. СРС играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

- К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом СРС играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.
- В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.
- Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:
  - изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
  - подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
  - участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.
- Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.
- Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях.

### **Чтение учебника**

- Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, производя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
- Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
- Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.
- При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.
- Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

### **Самопроверка**

- После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.
- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

### **1.4 Методические рекомендации по решению задач, в том числе дополнительных**

- Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.

- При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать из них самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
- Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.
- Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.
- В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа  $\pi$  и т. п.
- Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.
- Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
- Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Само решение следует сопровождать необходимыми расчетами и пояснениями с указанием применяемых формул, анализом и выводами.
- Работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво без помарок, зачеркиваний и сокращений слов.

### **1.5 Методические указания по подготовке к решению кейсов – практических ситуаций**

- Кейс (в переводе с англ. – случай) представляет собой проблемную ситуацию, предлагаемую студентам в качестве задачи для анализа и поиска решения. Обычно кейс содержит схематическое словесное описание ситуации, статистические данные, а также мнения и суждения о ситуациях, которые трудно предсказать или измерить. Кейс, охватывает такие виды речевой деятельности как чтение, говорение и письмо.
- Кейсы наглядно демонстрируют, как на практике применяется теоретический материал. Данный материал необходим для обсуждения предлагаемых тем, направленных на развитие навыков общения и повышения профессиональной компетенции. Зачастую в кейсах нет ясного решения проблемы и достаточного количества информации.
- Анализ кейса должен осуществляться в определенной последовательности:
  - Выделение проблемы.
  - Поиск фактов по данной проблеме.
  - Рассмотрение альтернативных решений.
  - Выбор обоснованного решения.

### **1.6 Методические рекомендации по выполнению домашних и индивидуальных заданий**

- Домашние задания по курсу выполняются обучающимися самостоятельно в отдельной тетради или в тетради для практических занятий.
- Домашние задания ориентированы на закрепление теоретического материала, изученного в ходе лекционного занятия и отработанного на практических занятиях по каждой теме курса.
- При выполнении домашнего задания обучающийся должен повторить теоретический материал лекции по данной теме; разобрать задания, выполненные на практическом занятии; записать условие задания в тетрадь; полно и с обоснованием действий выполнить решение заданий; при необходимости привести необходимые уточнения (формулы, теоремы, утверждения), на основе которых проводилось решение; записать ответ или вывод.
- Все индивидуальные задания необходимо защитить в устной форме, ответив на вопросы преподавателя по выполнению заданий и обоснованию приведенного решения.

### **1.7 Методические рекомендации по выполнению контрольных работ**

- Контрольные работы по данной дисциплине выполняются в отдельных тетрадях для контрольных работ или на отдельных листах, которых хранятся у преподавателя; в них же обучающийся выполняет работу над допущенными ошибками в случае неудовлетворительного выполнения контрольной работы или дополнительное задание для допуска к пересдаче контрольной работы.
- Контрольная работа считается зачтенной, если правильно выполнено не менее 60% заданий.
- Задания контрольной работы выполняются аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании.

- При написании работы можно использовать черновик.
- При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств, гаджетов, калькуляторов, учебной литературы.

### 1.8 Методические рекомендации по выполнению теста

- Итоговый тест проводится в виде компьютерного тестирования.
- Для успешного прохождения итогового теста обучающиеся в режиме самоподготовки выполняют задания подготовительных тестов.
- Сложные задания, встречаемые в тестах, студенты могут выполнять на групповых и индивидуальных консультациях по предмету.
- Перед прохождением теста обучающийся должен повторить весь теоретический и практический материал курса, выучить основные формулы, определения, утверждения и теоремы, знать способы и методы решения ключевых заданий курса.

### 1.9 Методические рекомендации по подготовке к сдаче зачета

- Зачет осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать зачет в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.
- По данной дисциплине зачет принимается по практической части курса. Задания, предлагаемые на зачете, соответствуют оценочным средствам для промежуточной аттестации обучающихся по предмету.
- Студент обязан не только представить правильно выполненные задания, но и защитить свое решение.
- Преподавателю предоставляется право задавать студентам вопросы по решению заданий практической части с целью выявления глубины понимания изученного материала и степени самостоятельности выполнения заданий.
- При явке на зачет студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют преподавателю в начале зачета.
- Рекомендуется при подготовке к зачету опираться на следующий план:
  1. Повторить теоретическую часть курса.
  2. После работы над теорией необходимо ответить на вопросы для самоконтроля.
  3. Повторить методы, способы и приемы решения задач по всем темам курса, опираясь на задания, которые решались на практических занятиях и предлагались для самостоятельной работы.
  4. Решить типовые задания по данной теме.

## II. Планы практических и лабораторных занятий

### Модуль 1: Элементы линейной алгебры (6 часов)

#### План:

1. Матрицы. Операции над матрицами. Обратная матрица.
2. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы, его вычисление.
3. Определители второго и третьего порядка. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определители n-го порядка. Свойства определителей. Методы вычисления определителей.
5. Системы линейных уравнений. Применение матриц и определителей к решению систем линейных алгебраических уравнений.
6. Теорема Кронекера – Капели. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
7. Решение однородных систем уравнений.
8. Формулы Крамера.

**Литература:** [3, с. 7-51, 55-86]; [4, с. 28-30]; [5, с. 96-134, 213-225].

#### Пример кейс-задания для коллективного решения:

I подзадача. Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases}$$

II подзадача. Представить системы уравнений в матричной форме:

$$4. \begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 2y + 4z = 11 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \\ 2x + 5z = 11 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 7y + 4z = -2 \end{cases}$$

III подзадача. Решить системы уравнений каждым из известных методов решения:

$$7. \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 4y + 3z = 9 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = -6 \end{cases}$$

### Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение матрицы.
2. Перечислить виды матриц.
3. Какие операции выполнимы над матрицами?
4. Перечислить элементарные преобразования матриц.
5. В каком случае выполнима операция умножения двух матриц?
6. Какими способами можно вычислить определитель третьего порядка?
7. Перечислите основные свойства определителей.
8. Назовите условие существования обратной матрицы.
9. Перечислите способы решения систем линейных уравнений.
10. При каком условии можно решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы?

### Задания для самостоятельной работы:

Вычислить определители:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} a & -1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 4 & 8 & -4 & 3 \\ 8 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Найти  $x$  из уравнений:

$$19. \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$20. \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

21. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Найти: а)  $A+B$ , б)  $2A$ , в)  $2A+3B$ , г)  $2B-A$ , д)  $AB$ , е)  $A^2+3E$ , ж)  $AB-BA$ .

22. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти: а)  $5A-B$ ; б)  $3A'-2B$ ; в)  $AB$ .

Найти произведение матриц:

23.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

24.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

24.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3 \ 2 \ 1)$

25. Вычислить матрицу  $D = (AB)' - C^2$ , где

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

26. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти: а)  $A^2+2B-3E$ ; б)  $AB-BA$ ;

в)  $(A-2B)^2$ ; г)  $A^2-B^2$ ; д)  $(A-B)(A+B)$ .

27. Найти произведение матриц  $ABC-3E$ , где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = (2 \ 0 \ 5)$ ,  $E$  – единичная матрица.

28. Вычислить  $A^2$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

29. Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 9 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ .

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

30.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$       31.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$       32.  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$       33.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

34.  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$       35.  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$       36.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$       37.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

## Модуль 2: Введение в математический анализ (6 часов)

### План:

1. Числовые функции. Область определения функции.
2. Обратная функция. Сложные функции.
3. Основные элементарные функции: показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрические и обратные тригонометрические.

4. Основные свойства функций.
5. Предел функции.
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
7. Свойства пределов функции.
8. Замечательные пределы.
9. Непрерывность функции.

**Литература:** [1, с. 40-74]; [2, с. 102-116, 144-222]; [3, с. 225-285]; [4, с. 8-12]; [5, с. 57-95].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Дайте определение функции.
2. Что такое область определения и множество значений функции?
3. Перечислите способы задания функций.
4. Что такое график функции?
5. Дать определение возрастающей (убывающей) функции.
6. Способы задания числовых последовательностей.
7. Дать определение предела числовой последовательности.
8. Определение односторонних пределов.
9. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.
10. Перечислить основные теоремы о пределах.
11. Применение эквивалентных бесконечно малых функций.

**Задания для самостоятельной работы:**

Пример 1. Найти область определения функций:

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} + \ln x - \sqrt{7-x}, \quad 2) f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} + \log_2 x.$$

Пример 2. Найти сложные функции  $f \circ g$  и  $g \circ f$ :  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ .

Пример 3. Построить график функции  $y = x^2 + 4x + 3$ .

Пример 4. Найти множество значений функции  $f(x) = x^2 - 8x + 20$ .

Пример 5. Исследовать на четность функцию  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

Пример 6. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x-x^2}{x^3+1}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x}$ ,

$$г) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}, \quad д) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2+1}{11x^2+5x}, \quad е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Пример 7. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$ .

**Модуль 3: Элементы дифференциального исчисления (6 часов)**

**План:**

1. Производная функции. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Геометрический, физический смысл производной.
3. Основные правила и формулы дифференцирования.
4. Производные высших порядков.
5. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
6. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции.
7. Экстремум функции.
8. Направления выпуклости, точки перегиба.
9. Асимптоты.
10. Исследование функций с помощью производных. Построение графиков.
11. Правила Лопиталя.

**Литература:** [1, с. 86-131]; [2, с. 223-313]; [3, с. 288-305, 314-323]; [4, с. 12-18]; [5, с. 269-300].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Понятие производной, ее механический и геометрический смысл.

2. Перечислить основные правила дифференцирования.
3. Понятие дифференциала, его геометрический смысл.
4. Таблица производных.
5. Каковы необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функций?
6. Дать определение максимума и минимума функции.
7. Алгоритмы нахождения наименьшего и наибольшего значений функций.
8. Каковы условия выпуклости графика функции?
9. Сформулируйте условия перегиба.
10. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.
11. Правила раскрытия неопределенностей.

#### Задания для самостоятельной работы:

Пример 1. Вычислить производную функции  $y = (3x^3 - 2x + 1)\sin x$ .

Пример 2. Вычислить производные: а)  $y(x) = x \cos x + x^2 \sin x$ , б)  $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$

Пример 3. Найти  $y'$ ,  $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$ .

Пример 4. Найти экстремумы функции  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ .

Пример 5. Найти предел функции  $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$  при  $x \rightarrow 0$ .

Пример 6. Провести полное исследование и построить график функции  $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

Пример 7. Исследовать и построить график функции  $y = x + \frac{1}{x}$

#### Модуль 4: Элементы интегрального исчисления (6 часов)

##### План:

1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл.
2. Основные неопределенные интегралы.
3. Свойства неопределенных интегралов.
4. Таблица простейших интегралов.
5. Метод непосредственного интегрирования.
6. Метод подстановки.
7. Интегрирование по частям.
8. Геометрический смысл и свойства определенного интеграла.
9. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
11. Площадь криволинейной фигуры.

**Литература:** [1, с. 132-177]; [2, с. 314-400]; [3, с. 326-344, 365-378, 388-392]; [4, с. 20-27]; [5, с. 311-346].

##### Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
2. Дать определение первообразной функции. Привести примеры.
3. В чем состоит смысл действия интегрирования?
4. Почему при интегрировании появляется произвольная постоянная?
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования.
6. При каких условиях справедлива формула замены переменной в неопределенном интеграле?
7. При каких условиях справедлива формула интегрирования по частям?

##### Задания для самостоятельной работы:

Пример 1. Вычислить  $\int \frac{dx}{x+2}$ .

Пример 2. Найти  $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx$ .

Пример 3. Вычислить  $\int \frac{dx}{x^7}$ .



Пример 4. Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ .

Пример 5. Вычислить  $\int \frac{x^4+x^2-6x}{x^3} dx$ .

Пример 6. Вычислить  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Пример 7. Найти  $\int \arctg x dx$ .

Пример 8. Найти интеграл, используя подходящую подстановку  $\int (7x-1)^{23} dx$ .

Пример 9. Найти  $\int \sqrt{4x-5} dx$ .

Пример 10. Найти интеграл, используя интегрирование по частям  $\int x \cos x dx$ .

Пример 11. Вычислить интеграл  $\int x(x^2+1)^{3/2} dx$ .

Пример 12. Вычислить  $\int (2x+1)^{20} dx$ .

Пример 13. Вычислить  $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$

Пример 14. Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интеграл  $\int_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x dx$ .

Пример 15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .